

**Dr. Cvetityanin Lívía\***

## **Változó tömegű test dinamikája**

**Rövid összefoglalás.** Ez az értekezés egy áttekintés az MTA doktori disszertációról. Az értekezés bemutatja azokat a kutatási eredményeimet, amelyek a változó tömegű testek dinamikájára vonatkoznak. Az értekezés hat részt tartalmaz. A bevezető rész után a változó tömegű test alap dinamikai törvényei kerülnek bemutatásra. A harmadik fejezet témaköre a szakaszosan változó tömegű test dinamikája. A klasszikus dinamikai törvények és az analitikai módszerek lettek kiterjesztve és az értekezés a változó tömegű test síkbeli mozgásával foglalkozik, két példán keresztül. A negyedik témakör a folyamatosan változó tömegű testek dinamikájával foglalkozik. Az időben változó test tömege és tehetetlenségi nyomatéka változásakor az ellenerő mellett egy új ellennyomaték is kihat. A mozgás differenciál-egyenleteit a klasszikus és az analitikus dinamikai törvények alapján lettek meghatározva. A Lagrange-egyenletek a folyamatosan változó tehetetlenségi nyomatékú és tömegű test mozgása vizsgálatára lett használva. Megoldásra került egy meglévő műszaki probléma is, amelynek során a szalag rátekereslődik a dobra. Az ötödik fejezet a változó tömegű test rezgésével foglalkozik. Különböző rezgéskeltő rendszer volt vizsgálat tárgya és különböző módszerek lettek kifejlesztve. Az értekezés összefoglalással fejeződik be.

**Kulcsszavak:** változó tömeg, változó tehetetlenségi nyomaték, ellenerő, ellennyomaték, szakaszos tömeg változás, folyamatos tömeg változás.

### **DYNAMICS OF THE BODY WITH VARIABLE MASS**

**Resume:** In this paper the overview of the doctor dissertation of the author for the Hungarian Academy of Science is given. The dissertation deals with the problem of dynamics of a mass variable body. The dissertation is divided into six sections. After the introduction the basic relations of the dynamics of the body with variable mass is presented. In the third section the discontinual mass variation is considered. The general laws of rigid body dynamics and the analytical procedures are modified for mass variable systems. Specially, the plane motion of a mass variable body is discussed. Two examples are solved. In the fourth section the dynamics of the continual mass variation is analyzed. Due to time variation of the mass and of the moment of inertia of the body, a reactive force and a reactive torque occur which affect the motion of the body. Differential equations of motion are obtained using the classic dynamics laws but also the principles of analytical dynamics. Lagrange second order differential equations of motion for the free body with variable mass is composed. Using these equations the problem of motion of a rotor on which the band is winding up is investigated. In the Section 5, the vibrations of the mass variable system is considered. Various nonlinear one and two degrees of freedom oscillatory systems are investigated. The dissertation ends with a conclusion.

**Keywords:** variable mass, variable moment of inertia, reactive force, reactive torque, discontinual mass variation, continual mass variation.

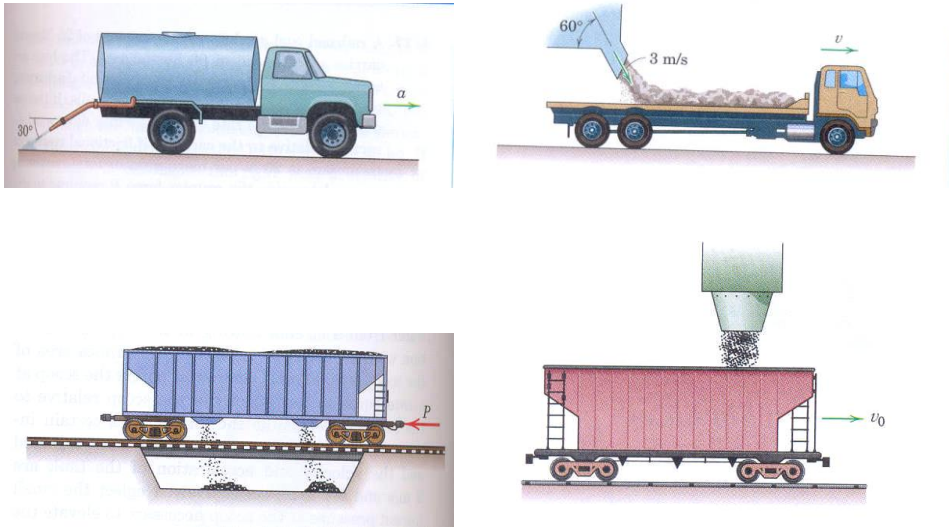
---

\* Dr. Cvetityanin Lívía, egyetemi rendes tanár, Újvidéki Egyetem, Műszaki Tudományok Kara, Mechanikai Tanszék, Újvidék

## *1. Bevezető: Változó tömegű gépek és mechanizmusok*

Számos gép és mechanizmus működése közben egyes elemeinek változik a tömege és a tehetetlenségi nyomatéka [1]-[4]. Ez komoly problémákat okozhat, mivel kihat a mechanizmus és a gép mozgására és a működés pontosságára. Változó tömegű gépek és mechanizmusok az iparban és a gyáriparban működnek (1. ábra). Külön említeném a különböző szűrőket, szállító szalagokat és gépeket, mérő eszközöket, keverő gépeket és változó tömegű rotorokat, a papír, a textil, és a kábelgyártó iparban, valamint a szőnyegszövő gépeket is. A tömeg és a tehetetlenségi nyomaték ezeknél a gépeknél folyamatosan vagy szakaszosan változik. Kihangsúlyozom, hogy a tömeg és a tehetetlenségi nyomaték változásának van előnye, de hátránya is. A múltban a változó tömegű testek mozgása külön jelentőséggel bírt az égitestek mechanikájában [5]-[7]. Az értekezésemben nem foglalkoztam a változó tömegű rakéta dinamikájával, mivel ennek a mozgása nagymértékben és leginkább mint változó tömegű pont elemezhető.

Az értekezés hat részre van felosztva és egy irodalomjegyzékkel fejeződik. Az első témakörben elemeztem egyes változó tömegű gépek és mechanizmusok működését. A második témakörben vizsgáltam a test tömegének, illetve tehetetlenségi nyomatékának csökkenése vagy növekedése esetén a mozgásmennyiség és perdület változását. Meghatároztam a szabadon mozgó, változó tömegű ilyen módon újonnan keletkezett test mozgásmennyiségét és perdületét. Értekezésem harmadik témaköre a szakaszosan változó tömegű test dinamikai vizsgálatára vonatkozik. A klasszikus dinamikai törvények és az analitikai módszer kiterjesztése után, az értekezés a változó tömegű test síkbeli mozgásával foglalkozik. Két példa megoldása került bemutatásra: egy tömegelem leválása után a rotor síkbeli mozgása és egy inga szétválásakor keletkező dinamikai problémák. A negyedik témakörben a folyamatosan változó tömegű testek dinamikáját tanulmányoztam.



1. ábra  
Változó tömegű járművek

Az időben változó test tömege és tehetetlenségi nyomatéka változásakor bevezettem az ellenerő mellett egy új ellennyomatékot is. Kidolgoztam a mozgás differenciál-egyenleteit. A Lagrange-egyenleteket a folyamatosan változó tehetetlenségi nyomatékú és tömegű test mozgása vizsgálatára használtam. Az újonnan levezetett elméletet felhasználtam egy meglévő műszaki probléma megoldására, amelynek során a szalag rátekereslődik a dobra. Az egyenleteket kibővítettem, a test tömegének, valamint a geometriájának változását is figyelembe vettem. Az ötödik témakörben a változó tömegű test rezgésével foglalkoztam. Az egy-szabadságfokú testek rezgés differenciál-egyenletének új megoldási módszerei lettek levezetve. Továbbá, a Van der Pol-féle rezgéskeltő rendszer, két szabadságfokú rezgések (rotorok rezgése) és két szabadságfokú lengő rendszerek is figyelembe lettek véve. Az értekezés összefoglalással fejeződik be.

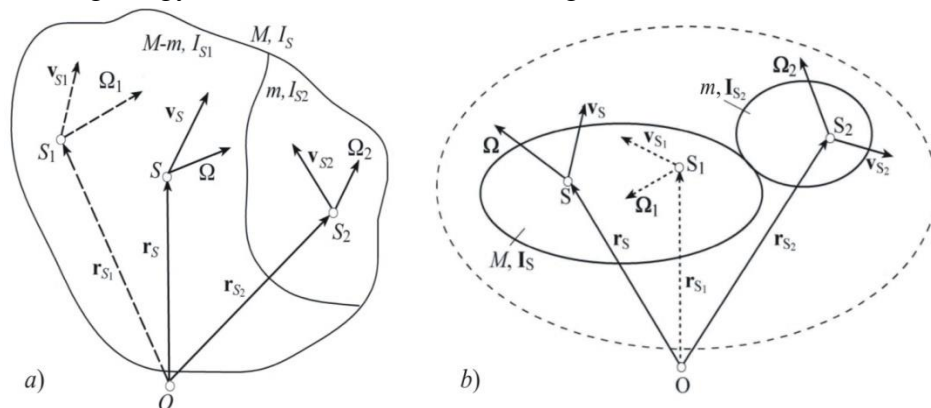
## 2. A testek tömege és tehetetlenségi nyomatéka változásának hatása a mozgásmennyiségre és a perdületre

A testek tömegének, illetve tehetetlenségi nyomatékának változására vonatkozóan a mozgásmennyiség és a perdület változása meghatározható [8],[9].

A 2. ábrán az alap test szétválási és egyesülési modelljei láthatóak. Tanulmányaimban a következőket feltételeztem:

1) a tömeg változása nagyon rövid ideig tart,

2) az eredeti test és a levált test, illetve az eredeti test és a hozzáadott test, a változások előtt és után egy rendszert képeznek. Az eredeti test és a levált test között, valamint az eredeti és a hozzáadott test között erőhatások keletkeznek. Felhasználva a 2) feltételt, a belső erőket nem szükséges figyelembe venni a rendszer mozgásának elemzésénél.



2. ábra

a) Test szétválási modellje, b) Testek egyesülési modellje

### 3. A szakaszosan változó tömegű testek dinamikája

Az általános klasszikus dinamikai törvények alapján kifejleszhető a merev testek tömege, illetve tehetetlenségi nyomatéka változásának elmélete [10]. Annak alapján kiterjeszhető a merev test szétválásával vagy egyesülésével keletkezett mozgás elemzésének módszere. Meghatározható a test sebességének és szögsebességének ugrásszerű változása, amely a test szétválásakor, illetve egyesülésekor jön létre. Külön esetként a szétválasztott testek síkbeli mozgása is megoldható. Az így kifejlesztett módszert alkalmazva, a doktori értekezésben egy Jeffcott rotorról leválasztott tömeg dinamikai paraméterei lettek meghatározva.

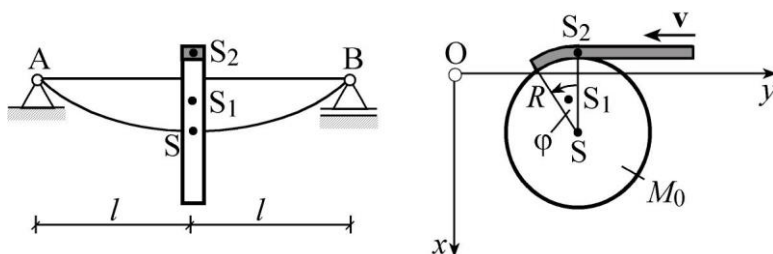
Alkalmazva az analitikus dinamikában szerepelő elveket, egy új analitikus eljárás mód lett kifejlesztve, amellyel meghatározható a változó tömegű és tehetetlenségi nyomatékú test sebessége és szögsebessége is, amely a tehetetlenségi jellemzők szakaszos megváltozásakor jelentkezik [11]. Az analitikai módszerrel a test sebessége és szögsebessége egy tömegem leválása vagy hozzáadása után meghatározható. A módszer az

ütközés analitikus elméletén alapszik. A módszer a szétválás előtti és a szétválás utáni kinetikai energia változásán alapszik. A testek egyesülésénél, ugyancsak, a kinetikai energia változása lett számításba véve. Az eredeti test, a levált és megmaradó test kinetikai energiáját, továbbá az eredeti, a hozzáadott és az egyesült test kinetikai energiáját kell kiszámolni. A rugalmatlan szétválás esetén változik a kinetikai energia a levált és a megmaradó testnél [12]. A tömeg szétválását egy ingánál mutattam be.

#### 4. Folyamatosan változó tömegű testek dinamikája

Már a XIX. században több tudós foglalkozott a folyamatosan változó tömegű test dinamikájával [13]-[16]. Külön kiemelném I.V. Meshchersky eredményét, aki a változó tömegű pont mozgását vizsgálja [8]. Ennek alapján számos tanulmány jött létre [17]-[30]. A folytonosan változó tömegű merev testek szabad mozgásának differenciál-egyenletei is kidolgozhatók [31]. Mivel nem csak a test tömege, hanem a tehetetlenségi nyomatéka is változik, az ellenerőn kívül, egy ellennyomatékot is azonosíthatunk, amely a test szétválásánál vagy egyesülésénél jelentkezik, ha a relatív sebesség és relatív szögsebesség nem nulla.

Ha a relatív sebesség és relatív szögsebesség nulla a mozgásegyenletek megfelelnek a változatlan tömegű test mozgásegyenleteinek [32]. Ha a leválasztott test abszolút sebessége és szögsebessége nulla, a mozgásmennyisége és perdülete a változó tömeg és sebesség, valamint a test változó tehetetlenségi nyomaték és szögsebesség, szorzata.



3. ábra

Változó tömegű Jeffcott rotor modellje

A folyamatosan változó tömegű és tehetetlenségi nyomatékú test mozgásegyenlete felhasználható egy valóságos műszaki probléma megoldására, amikor a szalag feltekeredik a dobra (3. ábra).

A folyamatosan változó tömegű test mozgására a Lagrange-féle differenciál-egyenletek levezethetők több módon (lásd pld. [1],[2],[4]).

Az értekezésben új módon lettek levezetve és a változó tehetetlenségi nyomaték is számításba lett véve. Kiszámítva a kinetikai energiát, a potenciális energiát és az általános erőt, amely figyelembe veszi az ellenerőt valamint az ellennyomatékot is, a test mozgása a Lagrange-féle differenciál-egyenletek alapján tanulmányozható [33],[34].

### *5. Változó tömegű testek rezgése*

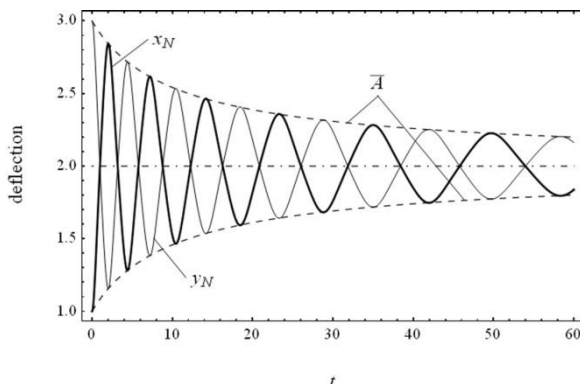
Az előbbi tézis alapján elkészíthető a változó tömegű test rezgésének modellje. Gyakran nemlineáris erők is hatnak. Ekkor a matematikai modell nemlineáris, időben változó paraméteres differenciál-egyenlet. A rezgés vizsgálatára az egyenlet megoldása szükséges. A gyenge nemlineáris egyenlet megoldására több analitikus módszer is létezik [35]-[43]. Sajnos, nem alkalmazhatók, ha az egyenletből hiányzik a lineáris elem. Az ilyen egyenletek megoldása új módszereket igényel. A módszer alkalmazható, ha nemlineáris erők figyelembe vétele is engedélyezett. A nemlineáris elem lehet egész és tört szám is. A módszer a konstans paraméterű rendszer pontos vagy approximatív megoldásán alapszik. A megoldás Ateb, trigonometrikus vagy Jacobi elliptikus függvény alakú [44]. A megoldás a rezgés pontos periódusidejét, a legnagyobb amplitúdót és a rezgés sebességét közelíti meg [45]. Az eddigi tanulmányokban a sebességet nem vették figyelembe az approximatív megoldásnál, így sokszor eltértek a pontos értéktől. Az itt bemutatott megoldás egy perturbált változata az állandó, változatlan paraméterű egyenlet megoldásának, ahol a rezgés amplitúdója, a frekvencia és a fázis időben változó függvények. A módszer különböző típusú lengő rendszerek vizsgálatánál alkalmazható. Az analitikus és a numerikus módszerrel meghatározott eredmények összehasonlíthatók. A numerikus eredmények meghatározására a jól ismert Runge-Kutta módszer lett használva. Az értekezésben kifejlesztett módszerrel meghatározott eredmények nem térnek el a numerikus módszerrel megállapításra került adatoktól.

Új eredmények jöttek létre az egy szabadságfokú rezgő testnél, ahol az ellenerő befolyásolja a rezgés amplitúdóját és a lengésidőt [46]-[49].

A változó tömegű Van der Pol típusú lengő rendszer rezgése is vizsgálat tárgya volt. Az a határérték lett meghatározva, amely alatt zártkörű mozgás történik, és a rezgés változatlan, noha egy határértékű amplitúdóval rezeg. Ha a tömeg változása átlépi ezt a határértéket, a rezgés idővel megszűnik [50].

Kutatásaim kiterjedtek a rotor rezgésére is, mivel a rezgés üzem közben energia-veszteséget okoz, amelyet ki kellene küszöbölni. A változó tömegű rotor két-, vagy egyfrekvenciás rezgése volt a kutatás tárgya. A tengely merevsége is hatással van az ilyen rotor rezgésére [51]-[55].

Végül két egyenlő, egyformán lassan változó tömegű nemlineáris rugókkal összekapcsolt lengőrendszer került vizsgálatra. Értekezésemben saját módszeremet használtam ennek a példának megoldására.



4. ábra

*Két test rezgése: analitikus megoldás  $A-t$ , és numerikus megoldás  $x_N-t$ ,  $y_N-t$*

Az analitikus ( $A - t$ ) a numerikus ( $x_N - t$ ) és ( $y_N - t$ ) megoldásokkal lett hasonlítva. Amint látható a 4. ábrán, nincs eltérés a numerikus és az analitikus megoldás között.

## 6. Összefoglalás

Az értekezés az MTA doktori disszertációm tartalmának az áttekintése. Az értekezés a változó tömegű test mozgásával foglalkozik. A szakaszos és a folyamatos tömegváltásra vonatkozik. A mozgás egyenletek felírása a klasszikus dinamikai törvények használatát igényelték. A változatlan tömegű test mozgásegyenletei módosultak. A test szétválása vagy hozzáadásakor az újonnan keletkezett test sebessége és szögsebessége ugrás szerint változik. Az új sebesség és szögsebesség analitikai módszerrel is meghatározható. A folyamatosan változó tömegű test mozgására az ellenerő és az ellennyomaték hatnak, mivel a test tehetetlenségi nyomatéka időben változik. Az értekezésben meg van adva a szabad test mozgására a Lagrange-féle differenciál-egyenlet is. Tanulmányaim eredménye a lengő test nemlineáris rezgésének kiszámítása. Új módszerrel

meghatároztuk a változó tömegű test rezgési amplitúdóját és fázisát. Egy és kétszabadságfokú rezgések voltak a kutatás tárgya. Az analitikus és a numerikus eredményeket hasonlítottuk össze. Az eltérés, nyilvánvalóan, nem jelentős.

### **Felhasznált irodalom:**

[1] A.P. Bessonov. Osnovji dinamiki mehanizmov s peremennoj massoj zvenjev. Nauka, Moscow, 1967.

[2] L. Cveticanin. Dynamics of machines with variable mass. Gordon and Breach Science Publishers, London, 1998.

[3] L. Cveticanin, A review on dynamics of mass variable systems, *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, Vol. 6, No.1, 2012, 56-74.

[4] L. Cveticanin. Dynamics of the Mass Variable Body. in “Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass”, Series CISM International Centre for Mechanical Sciences, Vol.557, Eds: H. Irschik, A. Belyaev, Springer, 2014.

[5] Ch. Dufour. Sur l'acceleration seculaire du mouvement de la lune. Comptes rendus des Seances de l'Ac. des Sc., LXII:840-842, 1866.

[6] A. Oppalzer. Ueber die Ursache, welche den Unterschied zwischen der theoretischen berechneten Secularacceleration in der Laenge des Mondes und der thatsaechlichen bedingen kann. *Astronomische Nachrichten*, 108 (2573):67-72, 1884.

[7] I.V. Meshcherski. Odin chasnij sluchaj zadachi Gouldena. *Astronomische Nachrichten*, 132(3153):9, 1893.

[8] I.V. Meshchersky. Dinamika tochki peremennoj massji. Magistarskaja disertacija, Peterburgski Universitet, Petersburg, 1897.

[9] I.V. Meshcherskij. Rabotji po mehanike tel peremennoj massji. Gos.Izd. tehnikoteoret. lit, Moscow, 1952.

[10] L. Cveticanin. Particle separation form a four particle system. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 26:270-285, 2007.

[11] L. Cveticanin, Dj. Djukic. Motion of body with discontinual mass variation. *Nonlinear Dynamics*, 52 (3):249-261, 2008.

[12] L. Cveticanin. Dynamics of body separation -- Analytical procedure. *Nonlinear Dynamics*, 55 (3):269-278, 2009.

[13] A. Cayley. On a class of dynamical problems. *Proceeding of the Royal Society of London*, III: 506-511, 1857.

[14] A. Cayley. On a class of dynamical problems. *Phylosophical Magazine and Journal of Science*, XV:306-310, 1858.

[15] A. Cayley. The collected mathematical papers, IV(225):7-11, 1859.



[16] H. Gylden. Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Koerpern in dem Falle das Massen Veraenderungen unterworfen sind. *Astronomische Nachrichten*, 109 (2593):1-6, 1884.

[17] N.G. Apykhtin, V.F. Jakovlev. On the motion of dynamically controlled systems with variable masses. *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, 44 (3):427-433, 1980.

[18] Z.-M. Ge, Y.H. Cheng. Extended Kane's equations for nonholonomic variable mass system. *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, 49 (2):429-431, 1982.

[19] Z.-M. Ge. Equations of motion of nonlinear nonholonomic variable mass system with applications. *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, 51 (2):435-437, 1984.

[20] A.G. Azizov. On the motion of a controlled system of variable mass. *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, 50 (4):567-572, 1986.

[21] Ya.F. Kayuk, A. Tilavov. Motion of an elastically suspended solid of variable mass. *Prikladnaja Mekhanika*, 23 (15):102-109, 1987.

[22] J.J. McPhee, R.N. Dubey. Dynamic analysis and computer simulation of variable-mass multi-rigid-body systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 (8):1711-1725, 1991.

[23] Ya.F. Kayuk, A. Akhmedov. Spatial motion of an elastically suspended cylindrical body of variable mass. *Prikladnaja Mekhanika*, 28 (7):62-69, 1992.

[24] S.M. Wang, F.O. Eke. Rotational dynamics of axisymmetric variable mass systems. *Journal of Applied Mechanics*, 62 (4):970-974, 1995.

[25] S. Djerassi. An algorithm for simulation of motions of 'variable mass' systems. *Advances in the Astronautical Sciences*, 99 (1):461-474, 1998.

[26] F.O. Eke, T.C. Mao. On the dynamics of variable mass systems. *The International Journal of Mechanical Engineering Education*, 30 (2), 2002.

[27] Ya.F. Kayuk, V.I. Denisenko. Motion of a mechanical system with variable mass - inertial characteristics. *International Applied Mechanics*, 40 (7):814-820, 2004.

[28] T. Tran, F.O. Eke. Effects of internal mass flow on the attitude dynamics of variable mass systems. *Advances in the Astronautical Sciences*, 119, (Issue SUPPL.):1297-1316, 2005.

[29] L.G. Luk'yanov. Conservative two-body problem with variable masses. *Astronomy Letters*, 31 (8):563-568, 2005.

[30] J.E. Howard. Particle dynamics with variable mass and charge. *Physics Letters, Section A: general, Atomic and Solid State Physics*, 366 (1-2):91-96, 2007.

[31] L. Cveticanin, I. Kovacic. On the dynamics of bodies with continual mass variation. *Trans ASME, Journal of Applied Mechanics*, 74:810-815, 2007.

- [32] T. Levi Civita. Sul moto di un corpo di massa variable. *Rendiconti del Lincei*: 329-333, 621-622, 1928.
- [33] C. Leubnert, P. Krumm. Lagrangians for simple systems with variable mass. *European Journal of Physics*, 11 (1) art.no.005:31-34, 1990.
- [34] C.P. Pesce. The application of Lagrange equations to mechanical systems with mass explicitly dependent on position. *Journal of Applied Mechanics*, *Trans. ASME*, 70 (5):751- 756, 2003.
- [35] A.H. Nayfeh, D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. Wiley, New York, 1979.
- [36] P.G.L. Leach. Harmonic oscillator with variable mass. *Journal of Physics A: General Physics*. 16 (14), art.no. 019:3261-3269, 1983.
- [37] M.S. Abdalla. Canonical treatment of harmonic oscillator with variable mass. *Physical Review A*, 33 (5):2870-2876, 1986.
- [38] M.S. Abdalla. Time-dependent harmonic oscillator with variable mass under the action of a driving force. *Physical Review A*, 34 (6):4598-4605, 1986.
- [39] G. Crespo, A.N. Proto, A. Plastino, D. Otero. Information-theory approach to the variable-mass harmonic oscillator. *Physical Review A*, 42 (6):3608-3617, 1990.
- [40] S.B. Yuste. On Duffing oscillators with slowly varying parameters. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 26 (5):671-677, 1991.
- [41] G.I. Sanchez-Ortiz, A.L. Salas-Brito. Chaos in a variable mass relaxation oscillator model for the leaky tap. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 89 (1-2):151-168, 1995.
- [42] G.-Q. Xie, S.-W. Qian, Z.-Y. Gu. Separation of variables treatment of the time-dependent damped harmonic oscillator with an arbitrary varying mass and with a force quadratic in the velocity under the action of an arbitrary time-varying force. *Physics Letters A*, 207 (1-2):11-16, 1995.
- [43] J. Flores, G. Solovey, S. Gill. Variable mass oscillator. *American Journal of Physics*, 71 (7):721-725, 2003.
- [44] L. Cveticanin, *Strongly Nonlinear Oscillators – Analytical Solutions*, Series: Undergraduate Lecture Notes in Physics, ISBN 978-3-319-05272-4, Springer, 2014.
- [45] L. Cveticanin, An analytical method for truly nonlinear oscillators, in “*Mathematics of Continuous and Discrete Dynamical Systems*” Ed. Abba B. Gumel, Ser. Contemporary Mathematics, AMS 618, 2014, pp.229-245.
- [46] L. Cveticanin. The influence of the reactive force on a nonlinear oscillator with variable parameter. *Journal of Vibrations and Acoustics*, *Trans. ASME*, 114 (4):578-580, 1992.
- [47] L. Cveticanin. Approximate solution of a time-dependent differential equation. *Meccanica*, 30:665-671, 1995.

[48] L. Cveticanin. A qualitative analysis of the quasi-linear one-degree-of-freedom system. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 23:667-675, 2004.

[49] L. Cveticanin. Oscillator with non-integer order nonlinearity and time variable parameters. *Acta Mechanica*, 223 (7):1417-1429, 2012.

[50] L. Cveticanin. Van der Pol oscillator with time-variable parameters. *Acta Mechanica*, 224 (5): 945-955, 2013.

[51] L. Cveticanin. Vibrations of a textile machine rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 97(2):181-187, 1984.

[52] L. Cveticanin. The oscillations of a textile machine rotor on which the textile is wound up. *Mechanism and Machine Theory*, 26 (3):253-260, 1991.

[53] L. Cveticanin. An approximative solution of a coupled differential equation with variable parameter. *Trans. ASME, J. of Applied Mechanics*, 60(1):214-217, 1993.

[54] L. Cveticanin. The influence of the reactive force on the motion of the rotor on which the band is winding up. *Journal of Sound and Vibration*, 167 (2):382-384, 1993.

[55] L. Cveticanin. Self-excited vibrations of the variable mass rotor/fluid system. *Journal of Sound and Vibration*, 212 (4):685-702, 1998.