

Változó tömegű test dinamikája

Bevezetés

Az időben változó paraméteres rezgések meghatározásával sok tudós foglalkozott (lásd pld. Meshchersky¹, Bessonov², Cveticanin^{3,4}). A változó paraméteres rezgések differenciális egyenlet megoldása leginkább a változatlan paraméteres rezgésen alapszik. Ha a lineáris változatlan paraméteres rezgésnél, pontos analitikai megoldás felírható és ha a paraméter változás lassú, akkor az időben változó paraméteres rezgések differenciális egyenlet megoldása szinte nem tér el a pontos rezgéstől. Ez a tézis felhasználható a nemlineáris rezgéseknél is.

Az időben változó paraméteres rezgések egyenlete

$$\ddot{x} + \omega^2(\tau)x|x|^{\alpha-1} = \mathcal{E}f(\tau, x, \dot{x}), \quad (1)$$

ahol $\alpha \in \mathbb{Q}_+ = \{(m/n) > 0 : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$, \mathbb{Z} egész szám, $\omega(\tau)$ időben változó paraméter, $\tau = \varepsilon t$ lassú idő, ε kis paraméter, $\mathcal{E}f$ nemlineáris függvény. A nemlineáris tag lehet egész vagy nem egész fokú.

A megfelelő változatlan paraméteres egyenlet ($\varepsilon=0$)

$$\ddot{x} + \omega^2(0)x|x|^{\alpha-1} = 0, \quad (2)$$

ahol $\omega_0^2 \equiv \omega^2(0) = \text{const}$. A kezdő értékek

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (3)$$

A bevezető rész után, a cikk második részében a (2) egyenlet pontos megoldása van megadva. A változó paraméteres egyenlet (1) megoldásával foglalkozik a harmadik rész. A megoldás mint Ateb függvény van bevezetve, ahol a rezgés amplitúdó és a periódus időben változnak. A negyedik részben egy változó tömegű test rezgése kerül ki-

* Dr. Cvetityanin Livia, egyetemi rendes tanár, Újvidéki Egyetem, Műszaki Tudományok Kara, Újvidék

vizsgálásra. Az új analitikai megoldás, a numerikai megoldással került összehasonlításra. Az ötödik részben két numerikus példa lett megoldva.

Analitikai pontos megoldás

Amint Cveticanin és Pogány⁵ munkájában kimutatásra került, a differenciális egyenlet pontos megoldása

$$x(t) = x_0 \cdot ca \left(\alpha, 1, \frac{|\omega_0| \sqrt{\alpha+1}}{\sqrt{2}} x_0^{(\alpha-1)/2} t \right), \quad t \in \mathfrak{R}, \quad (4)$$

vagyis

$$x(t) = x_0 \cdot sa \left(1, \alpha, \frac{\Pi_\alpha}{2} + \frac{|\omega_0| \sqrt{\alpha+1}}{\sqrt{2}} x_0^{(\alpha-1)/2} t \right), \quad (5)$$

ahol sa és ca a sinus és cosinus Ateb függvények⁶. Az Ateb függvények a $B(p,q)$ Beta speciális függvény inverz értéke. A sinus and cosinus Ateb függvények a következő két differenciális egyenlet megoldása (lásd Senik⁷)

$$\dot{v} - u^\alpha = 0, \quad \dot{u} + \frac{2}{\alpha+1} v = 0, \quad (6)$$

vagyis

$$v(s) = sa(1, \alpha, s), \quad u(s) = ca(\alpha, 1, s), \quad (7)$$

ahol

$$\Pi_\alpha := B\left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{2}\right). \quad (8)$$

A következő felírható:

$$sa(1, \alpha, s) = \begin{cases} -sa(1, \alpha, -s) \\ \mp ca(\alpha, 1, \frac{1}{2}\Pi_\alpha \pm s) \\ \pm sa(1, \alpha, \Pi_\alpha \pm s) \\ \mp sa(1, \alpha, 2\Pi_\alpha \mp s) \end{cases}, \quad (9)$$

ahol $sa(\alpha, 1, s)$ páros $2\Pi_\alpha$ függvény, $s \in \mathfrak{R}$. Azon kívül

$$sa^2(1, \alpha, s) + ca^{\alpha+1}(\alpha, 1, s) = 1, \quad (10)$$

ahol a $ca(1, \alpha, s)$ cosinus Ateb $2\Pi_\alpha$ -páros függvény:

$$\text{ca}(\alpha, 1, s) = \begin{cases} \text{ca}(\alpha, 1, -s) \\ \text{sa}(1, \alpha, \frac{1}{2} \Pi_\alpha \pm s) \\ -\text{ca}(\alpha, 1, \Pi_\alpha \pm s) \\ \text{ca}(\alpha, 1, 2\Pi_\alpha \mp s) \end{cases}. \quad (11)$$

Mivel

$$\frac{d}{ds} \text{ca}(\alpha, 1, s) = -\frac{2}{\alpha+1} \text{sa}(1, \alpha, s), \quad \frac{d}{ds} \text{sa}(1, \alpha, s) = \text{ca}^\alpha(\alpha, 1, s), \quad (12)$$

a (4) függvény a következő formába felírható

$$\dot{x} = -\frac{\sqrt{2\omega_0^2}}{\sqrt{\alpha+1}} x_0^{(\alpha+1)/2} \text{sa}(1, \alpha, \frac{|\omega_0| \sqrt{\alpha+1}}{\sqrt{2}} x_0^{(\alpha-1)/2} t), \quad (13)$$

ahol a maximum

$$\dot{x}_{\max} = \sqrt{\frac{2\omega_0^2}{\alpha+1}} |x_0|^{\alpha+1}. \quad (14)$$

Megoldás Ateb függvény használatával

Felhasználva a (4) és (12), az (1) differenciális egyenlet próba megoldása

$$x = A(t) \cdot \text{ca}(\alpha, 1, \psi(t)), \quad (14)$$

és

$$\dot{x} = -\frac{\omega(\tau) \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha+1}} [A(t)]^{(\alpha+1)/2} \text{sa}(1, \alpha, \psi(t)), \quad (15)$$

ahol

$$\dot{\psi}(t) = \omega(\tau) \sqrt{\frac{\alpha+1}{2}} [A(t)]^{(\alpha-1)/2} + \dot{\theta}(t),$$

és $A \equiv A(t)$, $\psi \equiv \psi(t)$, $\theta \equiv \theta(t)$ and $\omega \equiv \omega(\tau)$. Meghatározva a (14) első kivonatát

$$\dot{x} = -\omega(\tau)\sqrt{\frac{2}{\alpha+1}}[A(t)]^{(\alpha+1)/2} \text{sa}(1, \alpha, \psi(t)) + \dot{A}(t) \cdot \text{ca}(\alpha, 1, \psi(t)) - \frac{2A(t)\dot{\theta}(t)}{\alpha+1} \text{sa}(1, \alpha, \psi(t)),$$

és hasonlítva a (15), látható hogy egyformák ha

$$\dot{A}\text{ca}(\alpha, 1, \psi) - \frac{2A\dot{\theta}}{\alpha+1} \text{sa}(1, \alpha, \psi) = 0. \quad (16)$$

Behelyettesítve \ddot{x} és x függvényeket az (1) egyenletbe, következik

$$\dot{A}\text{sa}(1, \alpha, \psi) + \frac{2A\dot{\theta}}{\alpha+1} \text{ca}^\alpha(\alpha, 1, \psi) = -\sqrt{\frac{2}{\alpha+1}} \frac{\mathcal{E}fA^{(1-\alpha)/2}}{\omega}. \quad (17)$$

Kisebb transzformációk után, a következő két differenciális egyenletet kaptam

$$\dot{A} = -\frac{\sqrt{2}A^{(1-\alpha)/2}}{\omega\sqrt{\alpha+1}} \mathcal{E}f\text{sa}(1, \alpha, \psi), \quad A\dot{\theta} = -\frac{\sqrt{\alpha+1}A^{(1-\alpha)/2}}{\omega\sqrt{2}} \mathcal{E}f\text{ca}(\alpha, 1, \psi). \quad (18,19)$$

A (18) és (19) egyenletek megfelelnek a (1) másodrendű differenciális egyenletnek, ahol az új változók A és θ . Megoldani ezeket a differenciális egyenleteket nem is könnyű. Mivel ca és sa T -periodikus függvények ($f(t+T)=f(t)$) és

$$\int_{\gamma}^{T+\gamma} f'(s)f^\beta(s)ds = 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma \in \mathfrak{R},$$

ahol $f(s)=\text{ca}(\alpha, 1, s)$ és $T=2\Pi_\alpha$. Felhasználva az előbbi egyenletet, következik:

$$\dot{A} = -\frac{A^{(1-\alpha)/2}}{\omega\Pi_\alpha\sqrt{2(\alpha+1)}} \int_0^{2\Pi_\alpha} \mathcal{E}f\text{sa}(1, \alpha, \psi)d\psi,$$

és

$$A\dot{\theta} = -\frac{\sqrt{\alpha+1}A^{(1-\alpha)/2}}{2\Pi_\alpha\omega\sqrt{2}} \int_0^{2\Pi_\alpha} \varepsilon fca(\alpha,1,\psi)d\psi,$$

ahol (lásd Drogomirecka⁸)

$$\int_0^{2\Pi_\alpha} sa^\alpha(n,m,\psi)ca^q(m,n,\psi)d\psi = \frac{1}{2}(1+(-1)^p+(-1)^q + (-1)^{p+q})B\left(\frac{p+1}{n+1}, \frac{q+1}{m+1}\right), \quad (20)$$

és

$$p, q \in \left\{ \frac{r}{l} : r \in Z, l = 2k-1, k \in N \right\}.$$

4. Rezgés amplitúdó és a fázis számítása

Test, melynek tömege változik és a reaktív erő hat, rezgésének egyenlete

$$m(\tau)\ddot{x} + kx|x|^{\alpha-1} = -\varepsilon \frac{dm(\tau)}{d\tau} \dot{x},$$

ahol $m(\tau)$ időben változó tömeg, és $\frac{dm(\tau)}{d\tau} \dot{x}$ a reaktív erő, mely a tömeg változását okozza. Az egyenlet felírható mint

$$\ddot{x} + \omega^2(\tau)x|x|^{\alpha-1} = -\frac{\varepsilon}{m(\tau)} \frac{dm(\tau)}{d\tau} \dot{x}, \quad (21)$$

ahol $\omega^2(\tau)=k/m(\tau)$.

Felhasználva a (18) és (19) egyenleteket, a (21) egyenlet új formája

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{2}{\alpha+1} \frac{\varepsilon A}{m(\tau)} \frac{dm(\tau)}{d\tau} sa^2(1,\alpha,\psi), \\ A\dot{\theta} &= -\frac{\varepsilon A}{m(\tau)} \frac{dm(\tau)}{d\tau} sa(1,\alpha,\psi)ca(\alpha,1,\psi). \end{aligned} \quad (22,23)$$

Számítás után, a differenciális egyenletek

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= -\frac{1}{\alpha+1} \frac{\varepsilon A}{m(\tau)} \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\Pi_\alpha} \int_0^{2\Pi_\alpha} sa^2(1, \alpha, \psi) d\psi \\
&= -\frac{2}{\alpha+1} \frac{\varepsilon A}{m(\tau)} \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\Pi_\alpha} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{\alpha+1}\right), \\
A\dot{\theta} &= -\frac{\varepsilon A}{m(\tau)} \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{1}{2\Pi_\alpha} \int_0^{2\Pi_\alpha} sa(1, \alpha, \psi) d\psi ca(\alpha, 1, \psi) d\psi = 0.
\end{aligned}
\tag{24,25}$$

A (25) egyenlet megoldása $\theta = \theta(0) = \text{const}$. A (24) differenciális egyenlet megossza a változókat

$$\frac{dA}{A} = -P \frac{dm}{m}, \tag{26}$$

ahol a P constans

$$P = \frac{1}{\alpha+1} \frac{B\left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{3}{2}\right)}{B\left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3+\alpha}. \tag{27}$$

Behelyettesítve a kezdő értékeket $x(0) = x_0$ és $m(0) = m_0$, a (26) differenciális egyenlet megoldása

$$A = x_0 \left(\frac{m_0}{m}\right)^{\frac{1}{3+\alpha}}. \tag{28}$$

A rezgés amplitúdó növekszik, a tömeg pedig csökken; és fordítva. A rezgés amplitúdó változik a nemlineáris tag változásával: a lineáris rezgő testnél az amplitúdó változása $x_0(m_0/m)^{1/4}$ (az eredményt felmutatta Bessonov², is) a nagyobb fokú nemlinearitásnál ($\alpha \rightarrow \infty$) az amplitúdó constans, vagyis, $A \approx x_0$.

A maximális rezgés sebessége

$$\dot{x}_{\max A} = \frac{\omega_0 \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha+1}} x_0^{(\alpha+1)/2} \left(\frac{m_0}{m}\right)^{\frac{\alpha+2}{\alpha+3}}, \tag{29}$$

illetve,

$$\dot{x}_{\max A} = v_{\max} \left(\frac{m_0}{m} \right)^{\frac{\alpha+2}{\alpha+3}}, \quad (30)$$

ahol v_{\max} a constans tömeg rezgés sebessége. A maximális rezgés sebesség növekszik, ha a tömeg idővel csökken, illetve, fordítva. A rezgés sebessége függ a nemlinearitás fokától is: a lineáris rezgésnél $v_{\max}(m_0/m)^{3/4}$ és ha $\alpha \rightarrow \infty$ a rezgés sebessége $v_{\max} (m_0/m)^1$.

A Duffing-típusú rezgésnél, felhasználva (28) és (29) egyenleteket, az amplitúdó és maximális rezgés sebessége

$$\frac{m_0^{1/6}}{m}, \quad \dot{x}_{\max A} = v_{\max} \left(\frac{m_0}{m} \right)^{5/6}. \quad (31)$$

Végül, két numerikus példa van megoldva.

Példák

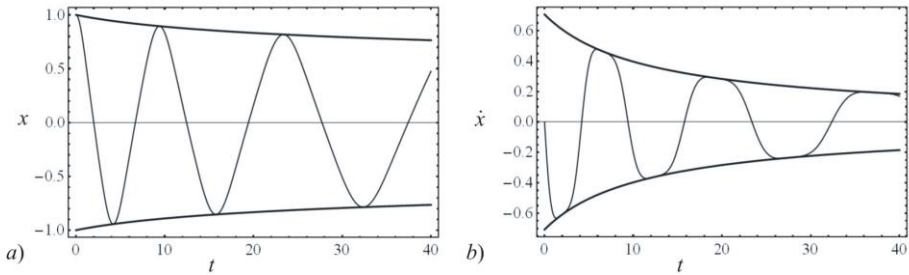
1. A Duffing-típusú változó tömegű test nemlineáris rezgése

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + x^3 = 0, \quad (32)$$

ahol a kezdő értékek $x(0)=x_0=1$ és $\dot{x}(0)=0$, és a tömeg változása $m=(1+0.1t)$. Runge-Kutta módszerrel meghatározzuk a numerikus értékeket és az $x-t$ és $\dot{x}-t$ függvényt felrajzoljuk (1. ábra). Az analitikai megoldás Ateb függvény és az amplitúdó és a sebesség függvénye (31)

$$A = (1 + 0.1t)^{-0.16667}, \quad \dot{x}_{A\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + 0.1t)^{-0.83333}. \quad (33)$$

Az 1.a) ábrán a numerikailag meghatározott $x-t$ és analitikailag kiszámított $A-t$, illetve, a numerikus $\dot{x}-t$ és analitikus $\dot{x}_{\max A}-t$ függvények vannak felrajzolva (1.b ábra). Az amplitúdó és maximális sebesség görbék (33) megfelelnek a numerikus megoldásnak. Az eltérés minimális.



1. ábra

Duffing-típusú tömeg változó test rezgése: a) $x-t$ (vékony vonal) és $A-t$ (vastag vonal); b) $\dot{x}-t$ (vékony vonal) és $\dot{x}_{A_{\max}}-t$ (vastag vonal).

2. Felírjuk a másodfokú változó tömeg

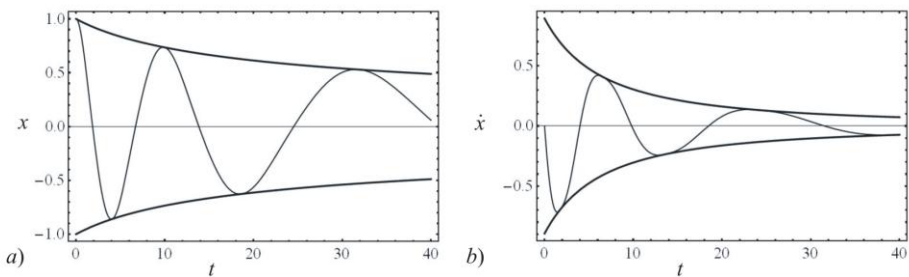
$$m=(1+0.1t)^2,$$

rezgését

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + x|x|^{1/2} = 0, \quad (34)$$

ahol a kezdő értékek $x(0)=x_0=1$ és $\dot{x}(0)=0$. Runge-Kutta módszer a numerikus $x-t$ és $\dot{x}-t$ eredményt felmutassa. Analitikus módszerrel meghatározott amplitúdó (28) és maximális rezgés sebesség (29):

$$A = (1 + 0.1t)^{-2/9}, \quad \dot{x}_{A_{\max}} = \frac{2}{\sqrt{5}}(1 + 0.1t)^{-7/9}. \quad (35)$$



2. ábra

*Másodfokú változó tömeg rezgése: a) $x-t$ (vékony vonal) és $A-t$ (vastag vonal);
b) $\dot{x}-t$ (vékony vonal) és $\dot{x}_{A_{\max}}-t$ (vastag vonal)*

A 2.a) ábrán a numerikus $x-t$ és analitikus $A-t$, illetve a 2.b) ábra, a numerikus $\dot{x}-t$ és $\dot{x}_{A_{\max}}-t$ görbékét ábrázolja. Az analitikai és a numerikai értékek összhangban vannak.

Összegzés

A közlemény egy új módszert mutat be a változó tömegű test rezgésének vizsgálatára. A rezgést a tömegváltozásból eredő erők és a különböző nemlineáris erők okozzák. A rezgés matematikai modellje nemlineáris időben változó paraméteres másodrendű differenciális egyenlet. A nemlineáris tag lehet egész, de nem egészfokú is. A módszer a konstans paraméterű rendszer pontos vagy approximatív megoldásán alapszik. A megoldás A teb függvény alakú. A megoldás a pontos rezgési periódust, legnagyobb rezgés amplitúdót és rezgés sebességét közelíti meg. Az eddigi tanulmányokban, a sebesség nem volt számításba véve az approximatív megoldásnál és sokszor eltért a pontos nagyságtól. Az itt bemutatott megoldás egy perturbált változata az állandó változatlan paraméterű egyenlet megoldásának, ahol a rezgés amplitúdó, rezgés frekvencia és a fázis időben változó függvények. A módszer különböző típusú rezgő test mozgásának meghatározására alkalmazható. Az analitikus módszerrel meghatározott eredmények a numerikaival vannak összehasonlítva. A jól ismert Runge-Kutta módszert használtam a numerikus eredmények meghatározására. Az analitikus módszerrel kiszámított eredmények nem térnek el a numerikus módszerrel számított adatoktól.

Felhasznált irodalom:

1. Meshcherskij, I.V., *Rabotji po mehanike tel peremnoj massji.* Gos.Izd. tehniko-teoret.lit, Moscow, 1952.
2. Bessonov, A.P., *Osnovji dinamiki mehanizmov s peremnoj massoj zvenjev.* Nauka, Moscow, 1967.
3. Cveticanin, L., *Dynamics of machines with variable mass.* Gordon and Breach Science Publishers, London, 1998.
4. Cveticanin, L., *Oscillator with non-integer order nonlinearity and time variable parameters.* Acta Mechanica, 223 (7):1417-1429, 2012.
5. Cveticanin, L., Pogány, T., *Oscillator with a sum of non-integer order non-linearities.* Journal of Applied Mathematics, vol. 2012, art. no. 649050, 20 pages, 2012.
6. Rosenberg, R., *The Ateb(h)-functions and their properties.* Quarterly of Applied Mathematics, 21 (1):37-47, 1963.
7. Senik, P.M., *Inversion of the incomplete Beta function.* Ukrainian Mathematical Journal, 21:271--278, 1969.
8. Drogomirecka, H.T., *Integrating a special Ateb-function.* Visnik Lvivskogo Universitetu. Serija mehaniko--matematiczna, 46:108--110, 1997. (in Ukrainian).

Vibration of the mass variable body

Resume

In this paper a new method for solving of the vibrations of the mass variable body is presented. The vibrations are caused by the reactive and nonlinear forces. The mathematical model of the system is a second order differential equation with time variable parameters. The nonlinearity of the system may be of integer but noninteger order, too. The suggested method is based on the solution of the corresponding differential equation with constant parameters. The solution is assumed in the form of an Ateb function. The approximate analytic solution has the time variable amplitude, phase and frequency. The solving procedure is applied for determination of the vibrations of a mass variable body. Two numerical examples are solved: one with the nonlinearity of cubic type and linear mass variation, and the second with the nonlinearity of noninteger order and quadratic mass variation. The obtained approximate solutions are compared with numerical ones. The good agreement between the solutions is evident.